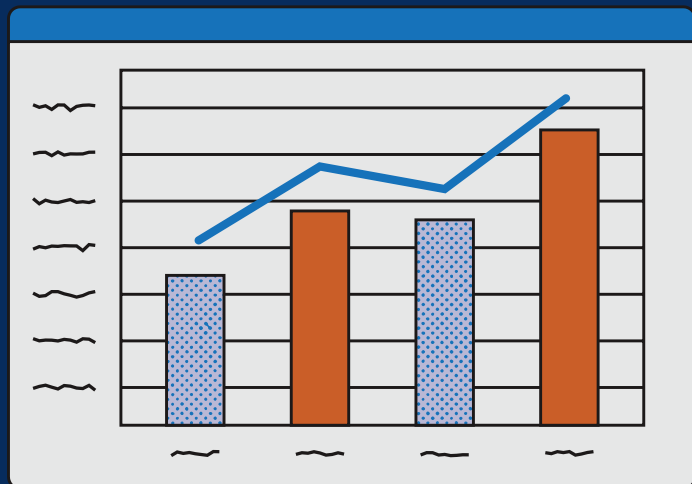


# INTEGRAL

T. Parulian



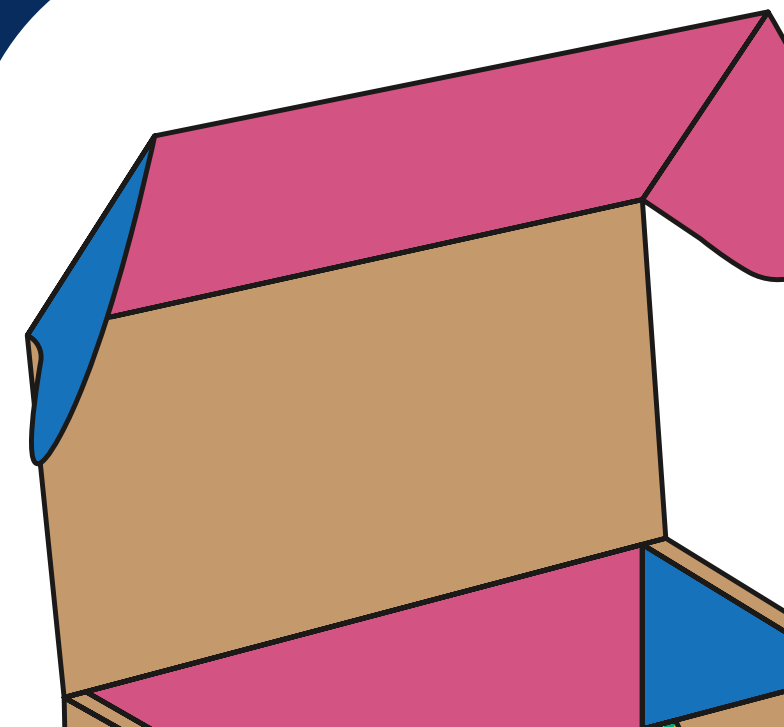
## **Integral :**

- 1. Integral T akentu**
- 2. Integral T ertentu**

**Integral T akentu :**  
S uatu konsep yang berhubungan dengan proses penemuan suatu fungsi asal, apabila turunan dari fungsinya diketahui.

**Integral T ertentu :**  
S uatu konsep yang berhubungan dengan proses penc arian luas suatu area yang batas-batas atau limit dari area tersebut sudah tertentu

**Integral adalah lawan diferensiasi**



# Penulisan Integral

Integral adalah lawan diferensiasi. Penulisan simbol integral:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Rumus dasar Integral

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

Contoh :

$$1. \int 6x dx = \frac{6x^{1+1}}{1+1} = \frac{6x^2}{2} = 3x^2$$

$$2. \int 12x^3 dx = \frac{12x^{3+1}}{3+1} = \frac{12x^4}{4} = 3x^4$$

$$3. \int 6\sqrt{x} dx = \int 6x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{6x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{6x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 4x^{\frac{3}{2}}$$

$$4. \int (2x+3) dx = \frac{2x^{1+1}}{1+1} + \frac{3x^{0+1}}{0+1} = x^2 + 3x$$

$$5. \int \sqrt{x} \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} (x^2 - 2x^{-1}) dx = \int x^{\frac{5}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}}$$

# Integral Tertentu

- Integral tertentu biasa digunakan untuk menghitung luas daerah yang dibatasi kurva  $y=f(x)$  dan sumbu  $x$ , dengan batas tertentu

$$\int_a^b f(x)dx = \left[ F(x) \right]_a^b = Fb - Fa$$

- Sifat – sifat integral tertentu

$$1. \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$2. \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$3. \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx, a < b < c$$

$$4. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$5. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$6. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$



Luas daerah yang dibatasi kurva  $y=f(x)$  dan sumbu  $x$   
Dengan batas  $x_1=a$  dan  $x_2=b$

$$L = \int_a^b f(x) dx$$

$$L = -\int_a^b f(x) dx$$

## Luas Daerah Antara Dua Kurva

- Untuk interval  $[a,b]$  dengan  $f(x) \geq g(x)$ , maka:

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

## Metode Integrasi

- Integral dengan Substitusi

contoh:  $\int \sqrt{2x-3} dx = ?$

Dusahakan menjadi bentuk  $\int u^n du$

Substitusi  $u=2x-3$

Cari turunan dari  $u = \frac{du}{dx} = 2$

Cari nilai  $dx$ :  $dx = \frac{du}{2}$

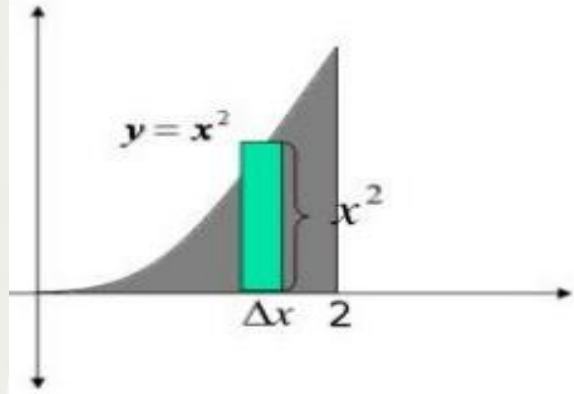
- Maka: 
$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x-3} dx &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= \frac{1}{3} u^{3/2} + C \end{aligned}$$

- Hasil akhir, dikembalikan ke nilai awal  $u = 2x-3$ , yaitu:

$$\int \sqrt{2x-3} dx = \frac{1}{3} (2x-3)^{3/2} + C$$

1

**Contoh :** Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = x^2$ , sumbu  $x$ , dan  $x = 2$ .



Luas irisan

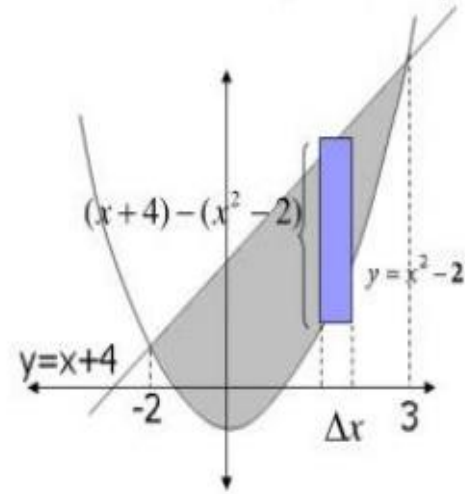
$$\Delta A \approx x^2 \Delta x$$

Luas daerah

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_0^2 = \frac{8}{3}$$

2

**Contoh :** Hitung luas daerah yang dibatasi oleh garis  $y = x+4$  dan parabola  $y = x^2 - 2$



Titik potong antara garis dan parabola

$$x+4 = x^2 - 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = -2, x = 3$$

Luas irisan

$$\Delta A \approx ((x+4) - (x^2 - 2)) \Delta x$$

Sehingga luas daerah :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^3 ((x+4) - (x^2 - 2)) dx = \int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) dx \\ &= \left. -\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 6x \right|_{-2}^3 = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

3

Contoh : Hitung luas daerah yang dibatasi oleh sumbu  $x$ ,

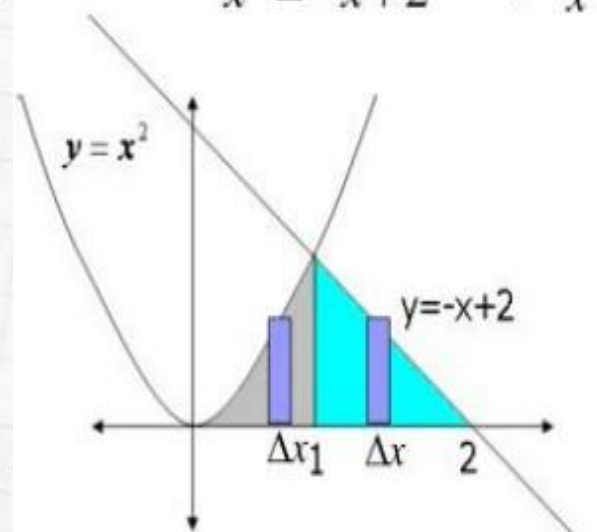
$$y = x^2 \text{ dan } y = -x + 2$$

Jawab

Titik potong

$$x^2 = -x + 2 \longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \longrightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\longrightarrow x = -2, x = 1$$



Jika dibuat irisan tegak, maka daerah harus dibagi menjadi dua bagian

Luas irisan I

$$\Delta A_1 \approx x^2 \Delta x$$

Luas irisan II

$$\Delta A_2 \approx (-x + 2) \Delta x$$

Luas daerah I

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Luas daerah II

$$A_2 = \int_1^2 (-x + 2) dx = \left[ -\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_1^2$$

$$= (-2 + 4) - \left( -\frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{1}{2}$$

Sehingga luas daerah

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

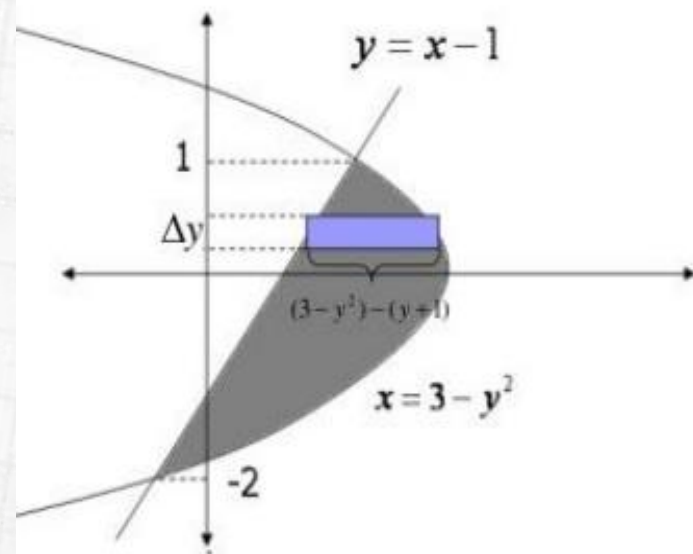


4

Contoh: Hitung luas daerah yang dibatasi oleh  $x = 3 - y^2$

dan  $y = x - 1$

Jawab :



Titik potong antara garis dan parabola

$$y + 1 = 3 - y^2$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y + 2)(y - 1) = 0$$

$$y = -2 \text{ dan } y = 1$$

Luas irisan

$$\Delta A = ((3 - y^2) - (y + 1)) \Delta y$$

Sehingga luas daerah :

$$L = \int_{-2}^1 ((3 - y^2) - (y + 1)) dy = \int_{-2}^1 (-y^2 - y + 2) dy$$

$$= \left[ -\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{2} y^2 + 2y \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$



Terima Kasih

