

Optimisasi (Maksimisasi dan Minimisasi)

(T. Parulian)

Nilai Optimal (ekstrem) dari sebuah fungsi, maka turunan pertamanya harus sama dengan nol, sedangkan turunan keduanya negatif.

Bila $y = f(x)$ maka $dy/dx = y' = 0$, bila $d^2y/dx^2 > 0$ mempunyai nilai minimal dan maksimal bila $d^2y/dx^2 < 0$

Apabila fungsi dengan dua variabel bebas, maka persyaratan agar terdapat nilai optimal tidak jauh berbeda. Dengan menggunakan konsep *partial derivative* dapat dikatakan bahwa suatu fungsi dengan dua variabel bebas bias mempunyai nilai optimal, maka syaratnya harus dipenuhi, yaitu turunan pertama secara partial harus sama dengan nol.

$$DU/dx = f_x = 0 ; DU/dy = f_y = 0$$

$$\text{Maksimum} \rightarrow d^2z/dx^2 = f_{xx} < 0 ; d^2z/dy^2 = f_{yy} < 0 \text{ dan } D > 0$$

$$\text{Minimum} \rightarrow d^2z/dx^2 = f_{xx} > 0 ; d^2z/dy^2 = f_{yy} > 0 \text{ dan } D > 0$$

1. Uji fungsi $U = 30x + 50y - x^2 - y^2 - xy$, apakah mempunyai nilai optimal maksimal atau minimal.
2. Evaluasi fungsi di bawah ini apakah mempunyai nilai optimal :
 - a. $U = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$
 - b. $U = x^2 + y^2 + 6xy + 16x$
 - c. $Z = x^2 + y^2 - 4xy - 6y$

3. Uji fungsi $Z = 2x^2 - 2xy + y^2 + 7x - 13y + 12$, apakah mempunyai nilai optimal maksimal atau minimal.

Pemecahan :

- **Penerimaan Total Maksimum**

Bila fungsi penerimaan total $RR=f(Q)$, maka penerimaan total akan maksimum bila dipenuhi syarat :

$TR' = 0$ (syarat yang diperlukan)

$TR'' < 0$ (syarat yang mencukupi)

TR = Revenue (penerimaan)

- **Penerimaan Total pajak**

Bila fungsi penerimaan total pajak $T = f(Q)$, maka penerimaan total dari pajak yang diterima oleh pemerintah T , akan maksimum bila dipenuhi syarat :

$T' = 0$ (syarat yang diperlukan)

$T'' < 0$ (syarat yang mencukupi)

T = Tax

$$\Pi = TR - TC$$

Jika fungsi laba (Π) dinyatakan sebagai $\Pi = f(Q)$, maka laba akan mencapai maksimum bila dipenuhi syarat :

- (1) $\Pi' = 0$ (syarat yang diperlukan)
- (2) $\Pi'' < 0$ (syarat yang mencukupi)

- **Biaya Total Minimum**

Bila fungsi biaya total dinyatakan sebagai $C = f(Q)$, maka biaya total akan mencapai minimum bila dipenuhi syarat :

- $C' = 0$ (syarat yang diperlukan)
- $C'' > 0$ (syarat yang mencukupi)

Biaya Rata-rata Minimum (AC minimum)

Bila fungsi biaya rata-rata dinyatakan sebagai $AC = f(Q) = TC/Q$, maka biaya rata-rata akan mencapai minimum, bila dipenuhi syarat :

$AC' = 0$ (syarat yang diperlukan)

$AC'' < 0$ (syarat yang mencukupi)

TC = Total Cost

AC = Average Cost

Biaya Marginal

$MC = dC/dQ$

- Penerimaan Total, Penerimaan Marginal dan Elastisitas Permintaan

Bila fungsi permintaan sejenis barang $Q_d = (P)$, dinyatakan dalam $P = f(Q)$, maka :

Penerimaan Total : $R = PQ = Q \cdot f(Q_d)$

Penerimaan rata-rata: $AR = R/Q_d = P$

Penerimaan Marginal: $MR = R' = d(R)/dQ$

- Hubungan antara MR, AR dan η_d :

$$MR = AR (1 + 1/\eta_d)$$

1. Seorang produsen memiliki fungsi permintaan atas barangnya berbentuk : $Q_d = 5 - 0,25 P$.

Sementara biaya rata-rata untuk memproduksi tiap unit barangnya adalah $\bar{C} = 3$.

Tentukan laba maksimum yang diperolehnya.

Penyelesaian :

Fungsi permintaan : $Q_d = 5 - 0,25 P$

Biaya rata-rata memproduksi tiap unit barang $\bar{C} = 3$

$$Q = 5 - 0,25 P \rightarrow P = 20 - 4Q$$

$$\begin{aligned}\Pi &= TR - TC = PQ - TC \\ &= (20 - 4Q)Q - 3Q \\ &= 17Q - 4Q^2\end{aligned}$$

Profit maks → $\Pi' = 17 - 8Q = 0$

$$Q = 2,125$$

Maka profit maksimum = $17(2,125) - 4(2,125)^2 = 18,063$

2. Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan jasa penyewaan mobil mewah dinyatakan oleh fungsi $C = f(Q) = 4Q^2 - 120Q + 3.600$

C = biaya total dan Q = kuantitas mobil

(a) Tentukanlah biaya rata-rata minimumnya.

(b) Tentukanlah biaya marginal pada saat biaya rata-ratanya minimum.

Penyelesaian :

$$\text{Biaya total } TC = 4Q^2 - 120Q + 3.600$$

$$AC = TC/Q = 4Q - 120 + 3600 / Q$$

Syarat diperlukan : $AC' = 0 \rightarrow AC$ minimum

$$4 - 3600/Q^2 = 0$$

$$Q = \pm 30$$

$Q = 30$ (bermakna)

$Q = -30$ (tidak bermakna)

Syarat cukup : $AC'' = 7200/Q^3 > 0 \rightarrow$ minimum pada $Q = 30$

a. **Biaya rata-rata minimum :**

$$AC = 4Q - 120 + 3600 / Q = 4(30) - 120 + 3600/30 = 120$$

b. **Biaya marginal saat AC minimum**

$$MC = dC/dQ = 8Q - 120 = 8(30) - 120 = 120$$

TERIMA KASIH